

安定集合凸多面体の余次数について

大阪大学 大学院情報科学研究科 情報基礎数学専攻
松下光虹 (Koji MATSUSHITA) *

概要

安定集合凸多面体はグラフから生起する凸多面体であり、そこから得られるトーリック環、及び Ehrhart 環の可換環論的性質と元のグラフの組合せ論的性質との関係が近年よく調べられている。一方で、一般の整凸多面体の余次数は Ehrhart 環の a -不変量やトーリック環の Castelnuovo–Mumford regularity といった代数的不変量と密接な関係にあることが知られている。本講演では、安定集合凸多面体の余次数とグラフ不変量であるクリーク数、彩色数の関係性について得られた結果を紹介する。

本講演は土谷昭善氏との共同研究 [6] の内容に基づく。

1 導入

以下、 $\mathbb{k}$ は体とする。 $P \subset \mathbb{R}^d$ を格子凸多面体とする。つまり、 P はその全ての頂点が $\mathbb{Z}^d$ であるような凸多面体とする。このとき、

$$\mathbb{k}[P] := \mathbb{k}[t_1^{m_1} \cdots t_d^{m_d} t_{d+1} : (m_1, \dots, m_d) \in P \cap \mathbb{Z}^d] \subset \mathbb{k}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}, t_{d+1}]$$

を P のトーリック環といい、

$$\mathcal{A}(P) := \mathbb{k}[t_1^{m_1} \cdots t_d^{m_d} t_{d+1}^n : n \in \mathbb{Z}_{>0}, (m_1, \dots, m_d) \in nP \cap \mathbb{Z}^d] \subset \mathbb{k}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}, t_{d+1}]$$

を P の Ehrhart 環という。両者ともに、 $\deg(t_1^{m_1} \cdots t_d^{m_d} t_{d+1}^n) = n$ として次数付き環とみなす。このとき、 $\dim \mathbb{k}[P] = \dim \mathcal{A}(P) = \dim P + 1$ であり、 $\mathbb{k}[P]$ は標準的次數付き環、 $\mathcal{A}(P)$ は半標準的次數付き環となる。 $\mathbb{k}[P]$ は $\mathcal{A}(P)$ の部分代数であり、一般に一致しないが、 P が整分割性を持つとき、またその時に限り一致することが知られている。ここで、 P が整分割性を持つとは、任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ と $\alpha \in nP \cap \mathbb{Z}^d$ に対し、ある $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in P \cap \mathbb{Z}^d$ があって $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ となる時にいう。

トーリック環、及び、Ehrhart 環の可換環論的な性質を元の多面体の組合せ論的な言葉を使って記述したり、逆に多面体の組合せ論的な性質を可換環論的な情報から特徴づけることが、本研究の基本的なモチベーションである。本講演では特に凸多面体の余次数に着目する。ここで、凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$ の余次数 $\text{codeg}(P)$ を次で定義する：

$$\text{codeg}(P) := \min \{n \in \mathbb{Z}_{>0} : \text{int}(nP) \cap \mathbb{Z}^d \neq \emptyset\}.$$

* k-matsushita@ist.osaka-u.ac.jp

ただし, $\text{int}(P)$ は P の相対内部を表す. また, 同様に P の**次数** $\deg(P)$ を次で定義する:

$$\deg(P) := \dim P + 1 - \text{codeg}(P).$$

このとき, $-\text{codeg}(P)$ は $\mathcal{A}(P)$ の a -不変量と一致することが知られている. つまり, $\omega_{\mathcal{A}(P)}$ を $\mathcal{A}(P)$ の正準加群としたとき, $\text{codeg}(P) = \min \{n \in \mathbb{Z}_{>0} : (\omega_{\mathcal{A}(P)})_n \neq 0\}$ が成立する. また, $\mathcal{A}(P)$ が半標準的度数付き環であるから, その Hilbert 級数 $\sum_{n \geq 0} (\dim_{\mathbb{k}} \mathcal{A}(P)_n) t^n$ は $(h_0^* + h_1^* t + \cdots + h_s^* t^s) / (1 - t)^{\dim P + 1}$ の形で書ける (ただし, $h_s^* \neq 0$) が, このときの s の値が $\deg(P)$ に等しいことが知られている. さらに, $S := \mathbb{k}[x_m : m = (m_1, \dots, m_d) \in P \cap \mathbb{Z}^d]$ を $\deg x_i = 1$ とする多項式環とし, $\mathbb{k}$ 代数準同型射 $\phi : S \rightarrow \mathbb{k}[P]$ を $\phi(x_m) := t_1^{m_1} \cdots t_d^{m_d} t_{d+1}$ から誘導されるものとする. この射は次数を保つ全射なので $I_P := \ker \phi$ は斉次となり, $S/I_P \cong \mathbb{k}[P]$ である. $\mathbb{k}[P]$ の極小自由分解を

$$0 \rightarrow \bigoplus_{j \geq 1} S(-j)^{\beta_{h,j}} \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{j \geq 1} S(-j)^{\beta_{1,j}} \rightarrow S \rightarrow \mathbb{k}[P] \rightarrow 0$$

としたとき,

$$\text{reg}(\mathbb{k}[P]) = \max\{j - i : \beta_{i,j} \neq 0\}$$

を $\mathbb{k}[P]$ の **Castelnuovo-Mumford regularity** (以降, 単に **regularity**) という. この値も, 上述した多面体の不変量との間に関係性がある:

命題 1 ([5, p. 5952]). $P \subset \mathbb{R}^d$ を整凸多面体とし, $\dim P = d$, $\{\sum_{m \in P \cap \mathbb{Z}^d} a_m m : a_m \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}^d$ であるとする. このとき, $\text{reg}(\mathbb{k}[P]) \geq \deg(P)$ が成立する. 特に, P が整分割性を持つなら, $\text{reg}(\mathbb{k}[P]) = \deg(P)$ である.

本講演では, グラフから生起する**安定集合凸多面体**について, 上述した不変量と元のグラフに付随する不変量との関係を調べる.

2 安定集合凸多面体

これ以降扱うグラフは全て有限単純グラフとする. つまり, ループや重複辺は持たないグラフであるとする. グラフ G に対し, $V(G) = [d] := \{1, \dots, d\}$ を G の頂点集合, $E(G)$ を G の辺集合とする. 頂点集合の部分集合 $S \subset V(G)$ について, 任意の S の 2 頂点が辺で結ばれていない (resp. 結ばれている) とき, S を G の**安定集合**または, **独立集合** (resp. **クリーク**) という. 空集合, 1 点集合は安定集合とみなす. また, $A \subset [d]$ に対し, $\mathbf{e}_A := \sum_{i \in A} \mathbf{e}_i$ とおく. ただし, $\mathbf{e}_i$ は $\mathbb{R}^d$ の i 番目の単位ベクトルとする. $\mathbf{e}_\emptyset = \mathbf{0}$ と定める.

$$P_G := \text{conv}(\{\mathbf{e}_S : S \subset V(G) \text{ は } G \text{ の安定集合}\})$$

を G の**安定集合凸多面体**という.

安定集合凸多面体の多面体的な性質と元のグラフの情報との関係が研究されているが, 特にグラフが**理想グラフ**である場合については非常によく調べられている. 理想グラフを定義する前にいくつかの用語を定義する.

グラフ G に対し、そのクリークの濃度の最大値を**クリーク数**といい、 $\omega(G)$ で表す。正整数 k について、任意の辺 $\{i, j\} \in E(G)$ に対し、 $f(i) \neq f(j)$ を満たす写像 $f: V(G) \rightarrow [k]$ を G の k **彩色** といい、 k 彩色が存在する最大の正整数 k を G の**彩色数**といい、 $\chi(G)$ で表す。グラフの k 彩色とは、簡単に言えば、「グラフの頂点を、辺で結ばれている頂点同士は異なる色が塗られているように、 k 色で塗り分けること」である。ここで、彩色を考えると、グラフのクリークになっている部分は全て異なる色で塗らなければならないから、必ずクリーク数以上の色が必要になる。つまり、 $\omega(G) \leq \chi(G)$ が成立する。この等号がいつ成立するか、という問いがグラフ理論において基本的で重要なものになる。

定義 2 ([1]). G の任意の誘導部分グラフ H に対し、 $\omega(H) = \chi(H)$ が成立するとき、 G を**理想グラフ**という。

二部グラフや弦グラフなどは理想グラフであることが知られている。また、「強理想グラフ定理」と呼ばれる以下の重要な特徴づけがある：

定理 3 ([3]). グラフ G が理想グラフであることと、 G とその補グラフが長さ 5 以上の奇サイクルを誘導部分グラフとして含まないことは同値である。

さらに、安定集合凸多面体を用いた特徴づけもある：

定理 4 ([4, Theorem 3.1]). グラフ G が理想グラフであることと、 P_G が次の表示を持つことが同値である：

$$P_G = \left\{ (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{ll} x_i \geq 0, & \forall i \in [d] \\ \sum_{i \in Q} x_i \leq 1, & \text{任意の } G \text{ の極大クリーク } Q \end{array} \right\}.$$

その他にも、様々なグラフの安定集合凸多面体の性質が調べられていが、本講演では、**線グラフ**と h **理想グラフ**に着目して調べる。

まず、線グラフについて紹介する。グラフ G に対し、その辺集合を頂点集合とみなして、2 つの辺がある頂点を共有するときに、その辺に対応する頂点同士を辺で結んで得られるグラフを $L(G)$ とおく。つまり、 $V(L(G)) = E(G)$ で、 $E(L(G)) = \{\{e, e'\} : e, e' \in E(G), e \neq e', e \cap e' \neq \emptyset\}$ である。このグラフ $L(G)$ を G の**線グラフ**という。 G の 1 つの頂点に接続している辺たちは、 $L(G)$ においてクリークを成すので、 $\Delta(G) \leq \omega(L(G)) \leq \chi(L(G))$ が成り立つことがわかる。ただし、 $\Delta(G)$ は G の最大次数を表す。さらに、 G が単純グラフである場合は次が成り立つ：

定理 5 ([7]). $\Delta(G) \leq \chi(L(G)) \leq \Delta(G) + 1$ である。

次に h 理想グラフについて説明する。一般のグラフ G について以下の包含関係が成立することが

わかる:

$$P_G \subseteq \left\{ (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{ll} x_i \geq 0, & \forall i \in [d] \\ \sum_{i \in Q} x_i \leq 1, & \text{任意の } G \text{ の極大クリーク } Q \\ \sum_{i \in C} x_i \leq \frac{|C|-1}{2}, & \text{任意の } G \text{ の奇サイクル } C \end{array} \right\}. \quad (1)$$

定義 6. (1) の包含の等号が成立するようなグラフ G を h **理想グラフ** という.

定理 4 から, 理想グラフは h 理想グラフであることがわかる. また, 長さ 5 以上の奇サイクルは理想グラフではない h 理想グラフであることがわかる.

3 主結果

本講演では, 安定集合凸多面体の余次数, 及び, そのトーリック環の regularity とグラフ不変量の関係を見る. さらに, グラフが線グラフ, あるいは, h 理想グラフである場合に, その安定集合凸多面体の余次数の明示的な公式を与える.

次が本講演の主定理である:

定理 7. 任意の有限単純グラフ G について,

$$\omega(G) + 1 \leq \text{codeg}(P_G) \leq \chi(G) + 1$$

が成立する.

つまり, $\text{codeg}(P_G) - 1$ は $\omega(G) \leq \chi(G)$ というグラフ理論において基本的な不等式の間に入る量であるということがわかる. また, G が理想グラフであれば $\omega(G) = \chi(G)$ が成立するので, 直ちに次がわかる:

系 8. G が理想グラフであれば,

$$\text{codeg}(P_G) = \omega(G) + 1 = \chi(G) + 1$$

である.

さらに, 命題 1 から, トーリック環 $\mathbb{k}[P_G]$ の regularity についても関係性が見出せる:

定理 9. G を d 頂点の有限単純グラフとしたとき,

$$d - \chi(G) \leq \text{reg}(\mathbb{k}[P_G])$$

が成り立つ. さらに, もし P_G が整分割性を持つなら,

$$\text{reg}(\mathbb{k}[P_G]) \leq d - \omega(G)$$

も成り立つ.

グラフが線グラフである場合, 定理 5 と我々の主定理から, $\text{codeg}(P_{L(G)})$ の値は $\Delta(G) + 1$ か $\Delta(G) + 2$ であることがわかるが, どちらの値になるかを完全に特徴づけられた:

定理 10. G を有限単純グラフとし, $G_1, \dots, G_r$ を G の連結成分とする. このとき,

$$\text{codeg}(P_{L(G)}) = \begin{cases} \Delta(G) + 2 & (\Delta(G) \text{ が偶数で } \Delta(G_i) = \Delta(G) \text{ なる } G_i \text{ は完全グラフ}), \\ \Delta(G) + 1 & (\text{それ以外}), \end{cases}$$

さらに, グラフが h 理想グラフであるときも余次数を計算することが出来た:

定理 11. G を有限単純な h 理想グラフとする. このとき,

$$\text{codeg}(P_G) = \omega(G) + 1$$

である.

4 主定理に関する例と問題

我々の主定理 7 の不等式は, 次の 4 つの場合に分けられる:

- (i) $\omega(G) + 1 = \text{codeg}(P_G) = \chi(G) + 1$;
- (ii) $\omega(G) + 1 < \text{codeg}(P_G) = \chi(G) + 1$;
- (iii) $\omega(G) + 1 = \text{codeg}(P_G) < \chi(G) + 1$;
- (iv) $\omega(G) + 1 < \text{codeg}(P_G) < \chi(G) + 1$.

それぞれの条件を満たすグラフが存在するか? という問いは自然であるが, 次の例でその全てを与える:

例 12. (1) 任意の理想グラフは (i) を満たす.

(2) $n \geq 5$ を奇数とし, $G = L(K_n)$ とおく. ただし, K_n は n 頂点完全グラフを表す. このとき, $\omega(G) = n - 1, \chi(G) = n$ であり, 定理 10 から $\text{codeg}(P_G) = n + 1$ であるので, (ii) を満たす.

(3) $n \geq 5$ を奇数とし, $G = C_n$ とおく. ただし, C_n は長さ n のサイクルを表す. このとき, $\omega(G) = 2, \chi(G) = 3$ であり, G は h 理想グラフであるから, 定理 11 より, $\text{codeg}(P_G) = 3$ であるので, (iii) を満たす.

(4) G を C_5 と $L(K_5)$ のジョインとする, つまり, $V(G) = V(C_5) \sqcup V(L(K_5))$ であり,

$$E(G) = E(C_5) \cup E(L(K_5)) \cup \{\{u, v\} : u \in V(C_5), v \in V(L(K_5))\}$$

である. このとき, $\omega(G) = \omega(C_5) + \omega(L(K_5)) = 2 + 4 = 6$ で $\chi(G) = \chi(C_5) + \chi(L(K_5)) = 3 + 5 = 8$ であり, 計算機ソフト Normaliz [2] を用いることで, $\text{codeg}(P_G) = 8$ が確認できる. なので, G は (iv) を満たす.

問 13. a, b, c を $0 < a \leq b \leq c$ を満たす整数とすると, 次を満たすグラフ G が存在するかどうかを決定せよ:

$$\omega(G) + 1 = a, \quad \text{codeg}(P_G) = b, \quad \chi(G) + 1 = c.$$

また, 定理 9 において, P_G が整分割性を持つなら $\text{reg}(\mathbb{K}[P_G]) \leq d - \omega(G)$ が成り立つことを確認したが, 整分割性の仮定を外した時に反例があるかどうかはわかっていない.

問 14. 任意の d 頂点有限単純グラフ G に対し,

$$\text{reg}(\mathbb{K}[P_G]) \leq d - \omega(G)$$

が成立するか.

参考文献

- [1] Claude Berge. Les problèmes de coloration en théorie des graphes. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, 9:123–160, 1960.
- [2] W. Bruns, B. Ichim, C. Söger, and U. von der Ohe. Normaliz. algorithms for rational cones and affine monoids. Available at <https://www.normaliz.uni-osnabrueck.de>.
- [3] Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour, and Robin Thomas. The strong perfect graph theorem. *Ann. of Math. (2)*, 164(1):51–229, 2006.
- [4] V. Chvátal. On certain polytopes associated with graphs. *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 18:138–154, 1975.
- [5] Johannes Hofscheier, Lukas Katthän, and Benjamin Nill. Ehrhart theory of spanning lattice polytopes. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (19):5947–5973, 2018.
- [6] Koji Matsushita and Akiyoshi Tsuchiya. Codegree and regularity of stable set polytopes. *arXiv preprint arXiv:2412.10090*, 2024.
- [7] V. G. Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p -graph. *Diskret. Analiz*, (3):25–30, 1964.